E.N.S.I de Physique - Option TA -Session 1985
DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : heures ————

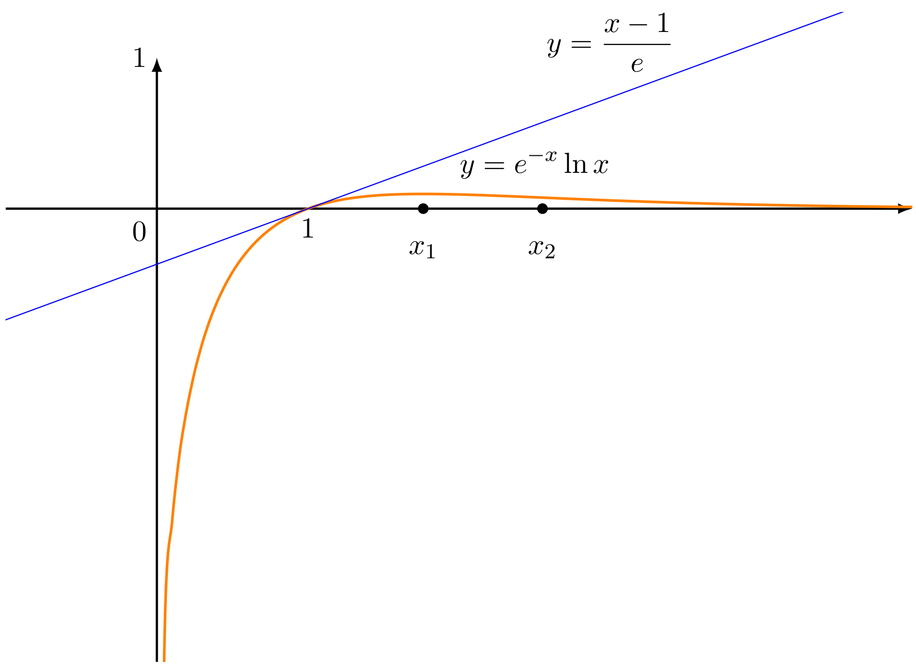
Un corrigé

Partie 1

1. La fonction f est le produit de deux fonctions indéfiniment dérivables sur $]0,+\infty[$, donc elle est indéfiniment dérivable. $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right) = \dfrac{e^{-x}}{x}(1 - x\ln x)$ et $f''(x) = e^{-x}\left(-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + \ln x\right)$. Donc $g(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} - \ln x\right) = \dfrac{x^2\ln x - 2x - 1}{x^2}$. L'étude de la fonction $x \mapsto x^2\ln x - 2x - 1$ montre qu'il existe un réel unique x_2 tel que $g(x_2) = 0$ avec $g(x) \leq 0$ sur $]0, x_2]$ et $g(x) \geq 0$ sur $[x_2, +\infty[$.

2. $f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1\ln(x_1) = 1 \Leftrightarrow x_1 \simeq 1.763222834$ et $f(x_1) = e^{-x_1}\ln(x_1) \simeq 0.09726013122$. De plus on a $f''(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2^2\ln(x_2) - 2x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 \simeq 2.552448936$.

3.



Partie 2

1. Cherchons un développement asymptotique de la suite $u_{n+1} - u_n$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n_2}\right) \\
&= \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge absolument (2>1), par domination la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = C + o(1)$. Ce qui prouve que $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \ln n = C + o(1)$, donc $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} = \ln n + C + o(1)$.

2. Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et $t \in [p-1, p]$. On a $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(p-1)^2}$ puis, par intégration,

$$\frac{1}{p^2} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{(p-1)^2}.$$

En remplaçant $p-1$ par p on obtient $\int_{p}^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{p^2}$. D'où :

$$\int_{p}^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{p^2} \leq \int_{p-1}^{p}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

3. En sommant entre n et N puis en faisant tendre N vers l'infini on obtient :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^2} \leq \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

ou encore

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{n-1}$$

Comme les membres de gauche et de droite sont tous les deux équivalents à $\frac{1}{n}$, le théorème d'encadrement assure que :

$$\sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

4. Notons $R_n(a) = \sum_{p=n}^{\infty} a_p$ et $R_n(b) = \sum_{p=n}^{\infty} b_p$. Puisque les suites ne s'annulent pas, $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Donc $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leq \varepsilon$ ou encore $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - b_n| \leq \varepsilon|b_n|$.
Alors

$$\forall n \geq n_0,\ \ |R_n(a) - R_n(b)| = \left|\sum_{p=n}^{\infty}(a_p - b_p)\right| \leq \sum_{p=n}^{\infty}|a_p - b_p| \leq \varepsilon\sum_{p=n}^{\infty}|b_p| = \varepsilon R_n(b).$$

Donc par la caractérisation précédente, $R_n(a) \underset{n\to\infty}{\sim} R_n(b)$.

5. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ étant convergente. Notons $S_n = \sum_{p=1}^{n-1} v_p$ la suite de sommes partielles associée et $R_n = \sum_{p=n}^{\infty} v_p$ le reste.
Par télescopage, $S_n = u_n - 1 = -\ln n + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - 1$. D'après ce qui précède S_n tend vers $C-1$, et on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n + R_n = C - 1$. D'un autre côté, $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$ entraîne $R_n = \sum_{p=n}^{\infty} u_p \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2}\sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$, et comme $R_n = C - 1 - S_n = C - u_n$, alors $u_n - C \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
y_n = x_{n+1} - x_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Donc $y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$. D'autre part, et d'une manière évidente, on a :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n(n+1))^2} = \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}.$$

Par comparaison des restes, on a donc $\sum_{p=n}^{\infty}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{\infty}\frac{2}{p^3}$ ce qui donne $\sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. On a $x_{n+1} - x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$, donc $\sum_{p=n}^{\infty}(x_{p+1} - x_p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^3}$ ce qui donne $\left(\lim_{p\to\infty} x_p\right) - x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. Mais $x_p = u_p - \frac{1}{2p}$ et par conséquent $\lim_{p\to\infty} x_p = C$, d'où :

$$x_n - C \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}.$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = z_{n+1} - z_n$, on a donc :

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{2n}\left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}\right] \\
&= \frac{1}{2n}\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^2}\left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&= o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de sommation des relations de comparaison (négligeabilité des restes), on obtient $\sum_{p=n}^{\infty} w_p = o\left(\sum_{p=n}^{\infty}\frac{1}{p^4}\right)$ ou encore $\lim_{p\to\infty} z_p - z_n = o\left(\frac{1}{3n^3}\right)$. Comme $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = C$, alors

$$C = z_n + \frac{\alpha_n}{n^2}$$

où $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. Avec Maple et $n = 10$, $C \approx z_{10} = \sum_{p=1}^{9}\frac{1}{p} - \ln(10) + \frac{1}{20} + \frac{1}{1200} \approx 0,57721$.

Partie 3

1. La fonction f est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$, négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$, de plus elle vérifie $f(t) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(t) \underset{x\to 0^+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc elle est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ et par conséquent $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. On a :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-e^{-t}+1)' \ln t \mathrm{d}t \\ &= \left[(-e^{-t}+1)\ln t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3. Déjà fait dans la première question de cette partie.

4. On a :

$$\begin{aligned} K &= \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (-e^{-t})' \ln t \mathrm{d}t \\ &= \left[(-e^{-t})\ln t\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

5. D'après ce qui précède et la relation de Chasles, $I = J + K$.

Partie 4

1. La fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Donc elle décroissante sur $]-1,0[$ et croissante sur $]0,+\infty[$. Comme elle est nulle en 0, alors elle est positive sur $]-1,+\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t < n$, alors $\frac{-t}{n} > -1$ et donc $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \le \frac{-t}{n}$ ou encore $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \le -t$. La fonction exponentielle étant croissante, donc $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}$. L'inégalité reste valable pour $t = n$.

3. La fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2$ est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1 + 2x = \frac{x(2x+1)}{1+x}$. Donc elle décroissante sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ et s'annule en 0, alors elle est positive sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[0,\frac{n}{2}\right]$, alors $\frac{-t}{n} \in \left[\frac{-1}{2},0\right]$ et donc $\frac{-t}{n} - \frac{t^2}{n^2} \le \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)$ ou encore $-t-\frac{t^2}{n} \le n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)$. La fonction exponentielle étant croissante, donc $e^{-t-\frac{t^2}{n}} \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

5. La fonction $x \mapsto e^{-x} + x - 1$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1 - e^{-x}$ qui est positive sur $[0,+\infty[$. Donc elle croissante sur $[0,+\infty[$. Comme elle est nulle en 0, alors elle est positive sur $[0,+\infty[$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{t^2}{n} \ge 0$ et donc

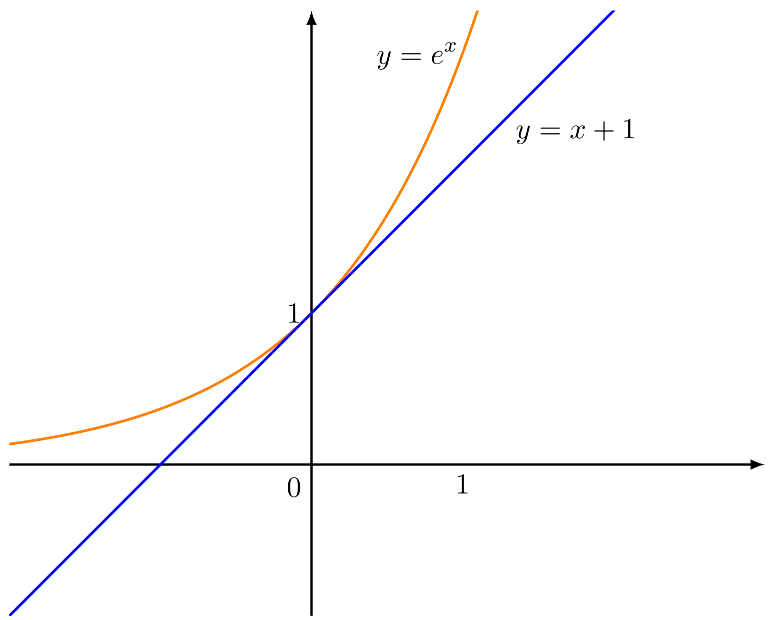
$$1 - \frac{t^2}{n} \le e^{\frac{-t^2}{n}}.$$

Si $t \in [0, \sqrt{n}]$, alors $t^2 \leq n$ et donc $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$ ou encore $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq e^{\frac{-t^2}{n}}$. En multipliant par le terme positif e^{-t}, on obtient $e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq e^{-t-\frac{t^2}{n}}$ et comme $0 \leq t \leq \sqrt{n} \leq \frac{n}{2}$ car $n \geq 4$, alors on peut utiliser l'inégalité de la question **4.**, pour conclure que

$$e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

6. L'inégalité à droite n'est autre que l'inégalité de la question **2.** Montrons maintenant l'inégalité à gauche, pour cela utilisons la concavité de la fonction exponentielle. La courbe représentative de la fonction exponentielle est convexe, donc elle est au dessus de sa tangente au point $(0, 1)$ d'équation $y = 1 + x$. Ceci montre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$$



En appliquant cette inégalité, respectivement, avec $x = \frac{t}{n}$ et $x = -\frac{t}{n}$ on obtient $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$ et $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

La fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = (1 - x)^n - 1 + nx$ est dérivable et on a $f'(x) = n\left(1 - (1 - x)^{n-1}\right) \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$. Comme $f(0) = 0$:

$$\forall x \in [0, 1] \quad (1 - x)^n - 1 + nx \geq 0$$

En remplaçant x par $\frac{t^2}{n^2}$ qui est dans $[0, 1]$ pour $t \in [0, n]$, on obtient l'inégalité $1 - \frac{t^2}{n} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$.

On obtient donc :

$$e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{t^2}{n}.$$

D'où $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$, ce qui montre l'inégalité à gauche.

Partie 5

1. La fonction $t \mapsto \frac{(1 - \frac{t}{n})^n - 1}{t}$ est bien définie et continue sur $]0, 1]$, de plus elle se prolonge par continuité en 0 par -1, donc l'intégrale J_n existe.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}$ est bien définie et continue sur $[1,n]$, donc l'intégrale K_n existe.

2. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3. Puisque u est non nulle, alors $1-u \neq 1$ et donc

$$\sum_{p=0}^{n}(1-u)^p = \frac{(1-u)^n - 1}{(1-u)-1} = -\frac{(1-u)^n - 1}{u}.$$

4. D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned} J_n + K_n &= \int_0^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{p=0}^{n-1}\int_0^n (1-t)^p \mathrm{d}t + \ln n \\ &= -\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p+1} + \ln n = -u_n. \end{aligned}$$

Partie 6

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. D'après la question **2.** de la partie **3**, on a :

$$J - J_n = \int_0^1 \left[\frac{e^{-t}-1}{t} - \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\right]\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\mathrm{d}t \geq 0$$

Mais d'après la question **6.** de la partie **4**, $e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} - e^{-t}\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) = \dfrac{t^2}{n}e^{-t}$, d'où :

$$J - J_n = \int_0^1 \frac{e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t = 0,$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = J$.

2. D'après l'inégalité de la question **5.**, de la partie **4**, on a :

$$\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_1^n te^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{e^{-t}}{t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^n \frac{e^{-t}}{t}e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = K_n.$$

Comme $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$, alors $K_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n te^{-t}\mathrm{d}t = 0$. On passe à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$.

3. Par passage à la limite dans l'égalité $J_n + K_n = -u_n$, on obtient $J + K = -C$, égalité qui s'écrit aussi sous la forme :

$$I = -C$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \mathrm{d}t = -C.$$

4. Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t} \mathrm{d}t$ sont convergentes, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{\frac{-1}{t}}}{t} \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t} \mathrm{d}t \\
&= -J - \int_0^1 \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}u \text{ avec le changement de variable } u = \frac{1}{t} \\
&= -J - K = C
\end{aligned}$$

••••••••••